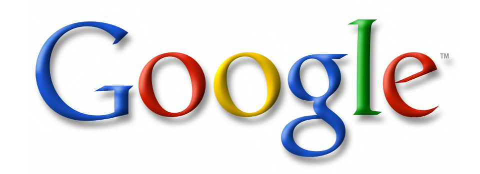
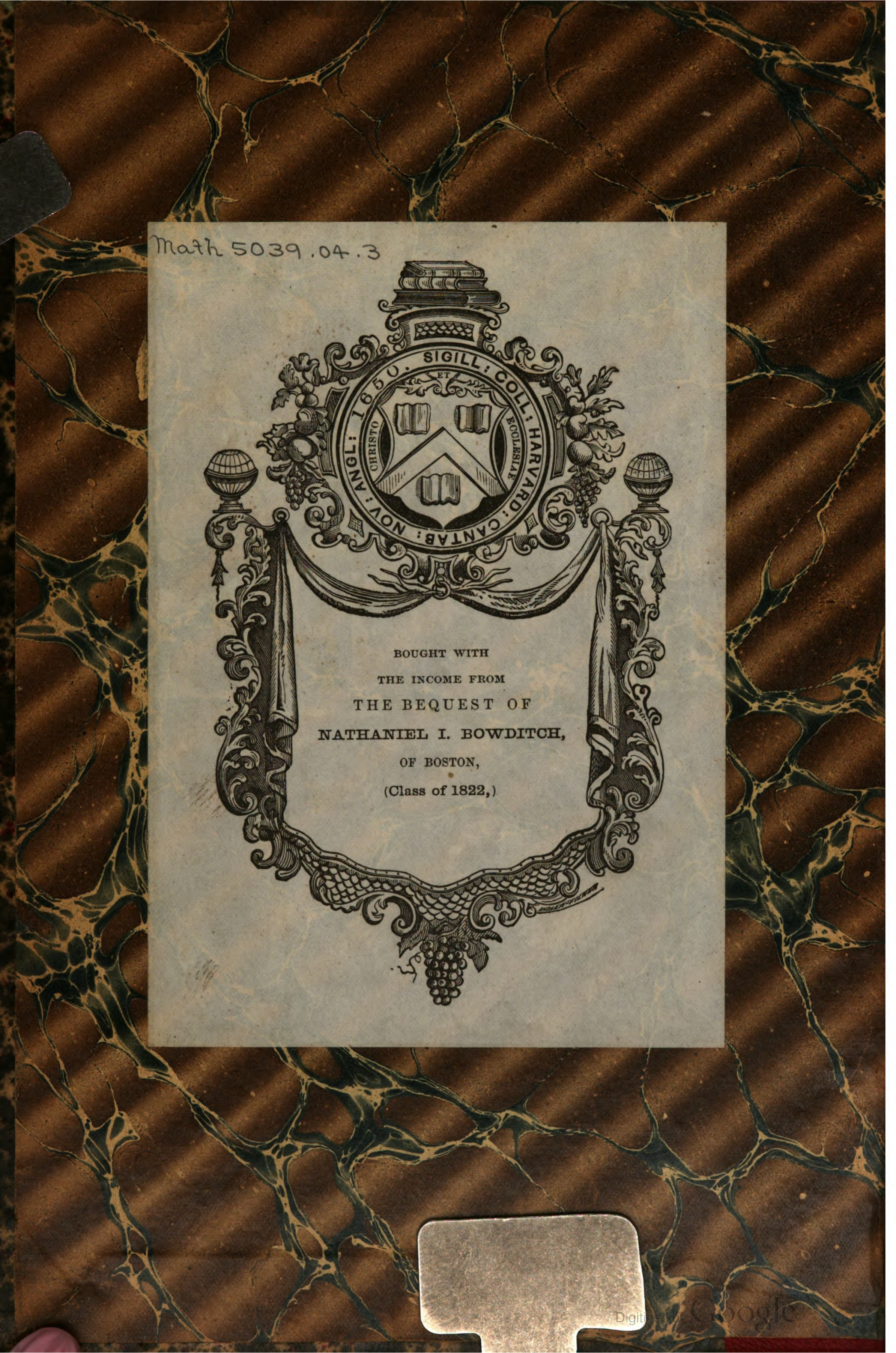




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

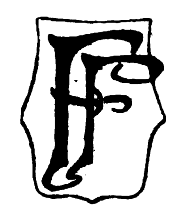


Le Postulatum d'Euclide est-il indémontrable ?

SOLUTION ET THÉORIE DES PARALLÈLES

PAR

A. PONDICHY.
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES



BRUXELLES
LIBRAIRIE FALK FILS, ÉDITEUR
15-17, RUE DU PARCHEMIN, 15-17

1904

MÉMOIRE

SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE PLANE.

SOLUTION

DU

POSTULATUM D'EUCLIDE

Le Postulatum d'Euclide est-il indémontrable ?

SOLUTION ET THÉORIE DES PARALLÈLES

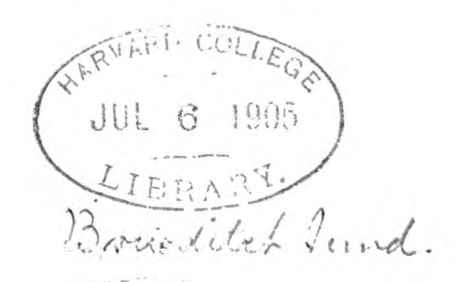
PAR

A. PONDICHY.
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES



BRUXELLES
LIBRAIRIE FALK FILS, ÉDITEUR
15-17, RUE DU PARCHEMIN, 15-17

1904


HARVARD COLLEGE
JUL 6 1905
LIBRARY.

PRÉFACE

Le *postulatum d'Euclide,* que nous rencontrons dans la théorie des parallèles, a été l'objet de nombreuses recherches. A mainte reprise, on l'a dit démontré, mais toujours cette démonstration a entraîné après elle un autre postulatum, lequel passe inaperçu pour quiconque croit avoir réussi, mais qui n'est pas sans être signalé par les géomètres. C'est ainsi que plus d'un mathématicien érudit des XVIIIe et XIXe siècles a essayé de le démontrer, mais non sans avoir dû bientôt y renoncer devant les résultats nuls auxquels aboutissaient généralement leurs recherches. Ce continuel échec n'a pas rebuté quelques hommes de science à donner une solution à cette question en posant comme principe que le *postulatum d'Euclide* est une chose qui se comprend mais que l'on ne peut pas démontrer.

Sans vouloir nous poser en critique hargneux contre cette thèse, nous nous permettrons de faire remarquer que ces savants, tout comme ceux qui ont essayé de le démontrer, ont admis un *postulatum;* toutefois, le *postulatum* de ces derniers résulte du manque de procédé.

On prétend le *postulatum d'Euclide* indémontrable en s'appuyant sur ce principe : qu'il n'est pas une conséquence des propositions antérieures à la théorie des parallèles sur laquelle on puisse baser entièrement celle-ci. C'est une erreur de raisonnement qui, jusqu'ici, a toujours été admise sans discussion.

Il est certain que si ce *postulatum* est resté jusqu'à présent indémontrable, c'est parce que la géométrie élémentaire n'a pas mis en œuvre tous les moyens dont elle dispose pour démontrer ses propositions.

En étudiant le premier théorème du premier livre de géométrie, on s'aperçoit immédiatement que ni les préliminaires, ni la définition de l'angle droit, ni la superposition n'offrent le moyen de le démontrer, et les géomètres des temps les plus anciens ont été acculés à avoir recours à un procédé spécial qui leur a fait surgir l'idée ingénieuse d'admettre que la droite pouvait être considérée comme tournant autour d'un point. Or, que s'en est-il suivi? C'est que, arrivés aux cas d'égalité des triangles, ces mêmes géomètres se sont bornés à se servir de la superposition. Mais ce genre unique de démonstration n'étant pas applicable au début de la théorie des parallèles, on se heurte nécessairement à des difficultés insurmontables : de là le *postulatum d'Euclide* avec son cortège de démonstrations erronées.

Il ressort donc de tout ce que nous venons de dire que pour démontrer le *postulatum d'Euclide*, il faut absolument chercher un moyen spécial pour démontrer, tout au moins un des théorèmes

de cette importante théorie, et, de cette façon, la difficulté s'évanouira sans laisser de trace.

*
* *

Nous basons toute cette nouvelle théorie sur le théorème II. Nous donnons, de trois manières différentes, la démonstration de ce théorème; toutefois, celle qui a le plus d'exactitude et qui est la plus catégorique est la seconde; la première et la troisième manière laissent subsister quelque doute, et voilà pourquoi nous nous bornons à insister sur la seconde, bien que les deux autres, surtout la première, puissent être considérées comme des corollaires de ce même théorème, tel qu'il est défini en second lieu.

Ce qu'on pourrait nous reprocher, c'est le principe sur lequel nous établissons toute notre démonstration. Ce reproche est dénué de fondement, car :

Une droite α *partage le plan dans lequel elle se trouve en deux parties; si une autre droite* β, *tracée dans le même plan, a des points situés dans une partie et dans l'autre, par rapport à* α, *elle coupera nécessairement cette dernière.*

On ne pourrait pas donner une démonstration plus exactement rigoureuse de ce principe que par le raisonnement suivant : vu que β, comme droite, forme une suite ininterrompue de points, elle ne peut avoir des points situés dans les deux régions du plan sans traverser α, c'est-à-dire sans couper la droite α.

D'ailleurs, ce principe est déjà mis en usage

par les géomètres bien avant la théorie des parallèles. C'est ainsi qu'on démontre que d'un point extérieur à une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite.

Peut-on déplacer un segment de droite de manière *que tous ses points aient une même vitesse?* nous demandera-t-on. Bornons-nous à répondre péremptoirement à cette question en disant que, en géométrie, tout peut se faire et se démontrer par supposition et que l'on n'a qu'à considérer les conclusions auxquelles on aboutit.

C'est d'ailleurs *le moyen spécial* dont nous nous sommes servi et dont nous avons parlé plus haut. Espérons qu'il trouvera autant d'admirateurs que d'imitateurs.

Bruxelles, le 24 novembre 1903.

A. Pondichy.

THÉORIE

DES

DROITES PARALLÈLES

1. Définition.

On appelle deux droites parallèles, deux droites qui situées dans un même plan ne peuvent se rencontrer.

Théorème I.

Deux droites qui sont perpendiculaires à une troisième, sont parallèles entre elles.

En effet, ces droites ne peuvent pas se couper, sans quoi on pourrait d'un même point, abaisser deux perpendiculaires à une même droite ce qui est impossible. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Dans tout plan, on peut toujours trouver une infinité de droites parallèles.* — Car il suffit pour cela de considérer une droite du plan et de mener ensuite une infinité de perpendiculaires à cette droite C. Q. F. D.

2. Définitions.

1° On appelle *distance d'un point à une droite, la distance de ce point au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point à la droite.*

2° *Deux droites d'un plan sont partout également distantes, lorsque tous les points de l'une, se trouvent à la même distance de l'autre, et réciproquement.*

3° Nous dirons, d'accord avec tous les géomètres, qu'une ligne quelconque peut être considérée comme engendrée par un point se déplaçant d'après une loi déterminée Il en résulte que les points qui se déplacent d'après une même loi, doivent engendrer les mêmes lignes, car il serait absurde de supposer qu'en déplaçant un point en ligne droite on obtiendrait une courbe.

Mais nous pouvons aussi considérer une ligne comme une suite de points.

Dire déplacer une ligne d'après une loi quelconque, c'est dire par définition déplacer la suite de points d'après une loi quelconque.

Lorsqu'une ligne se déplace d'un mouvement uniforme [1] pour tous ses points, la loi du déplacement devient unique pour tous ceux-ci. Donc, dans ce cas tous ses points engendreront les mêmes lignes

---

(1) Une ligne se meut d'un mouvement uniforme pour tous ses points, lorsque tous ceux-ci décrivent des lignes de longueur égale dans le même laps de temps, ou en d'autres termes tous ses points se déplacent avec la même vitesse.

Remarque. — Il est évident qu'une droite qui se déplace dans un plan, d'un mouvement uniforme pour tous ses points, en glissant sur une autre, fait avec cette autre un angle constant. En effet, tous ses points se mouvant d'une même vitesse, cette droite ne peut tourner autour d'aucun de ses points, donc l'angle reste constant.

En second lieu, lorsqu'une droite se déplace en glissant sur une autre et faisant avec cette autre un angle constant, je dis que son mouvement est uniforme pour tous ses points.

Soit le segment MN (fig. 1) et supposons que lorsque le point N est animé d'une vitesse quelconque, que le point M ait une vitesse double (par exemple); je vais démontrer que l'angle est variable. Concevons le segment MN d'abord perpendiculaire sur AB, faisons-le glisser sur celle-ci jusqu'à ce que son point N aura parcouru une longueur α, par exemple; par hypothèse, le point M aura décrit dans le même temps une ligne quelconque d'une longueur 2α. Faisons ensuite glisser le segment MN sur AB, en sens contraire, et d'un mouvement uniforme pour tous ses points : lorsque N aura parcouru α, il reviendra en sa position primitive sans que le point M puisse y arriver, donc l'angle a varié. On en conclut que si l'angle avait resté constant, comme nous le supposerons dans le théorème suivant, le segment se déplacera d'un mouvement uniforme pour tous ses points. C. Q. F. D.

Cela posé nous dirons :

Théorème II.

Dans tout plan, le lieu des points situés à une distance quelconque d'une droite de ce plan sont deux droites, partout également distantes de la droite considérée, et situées de part et d'autre de celle-ci dans le plan.

En effet, considérons une droite quelconque, AB, et un point **M** situé à une distance donnée de la droite, dans un plan P (fig. 1). Du point M abaissons une perpendiculaire sur AB, soit **N** son pied, et prolongeons cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même jusqu'en M'; faisons glisser cette perpendiculaire dans le plan P sur AB, et dans le sens AB, de manière 1° qu'elle reste constamment perpen-

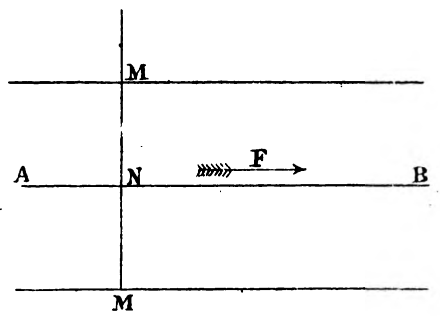


FIG. 1.

diculaire à AB, et 2° que son point N ne quitte pas cette dernière

Le point N engendrera la droite AB, et d'après ce qui précède, les points M et M' engendreront aussi des droites perpendiculaires à MM'; or, ces droites seront partout également distantes de AB, et de part et d'autre de celle-ci. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Deux droites, qui situées dans un même plan sont partout également distantes, sont parallèles.* En effet ces droites ne peuvent se rencontrer comme étant perpendiculaires à une même droite, donc elles sont parallèles. C. Q. F. D.

Deuxième démonstration. — Cette démonstration, que je considère très rigoureuse, repose sur le principe suivant : *Si une droite en rencontre deux autres, qui sont perpendiculaires à une même droite* Δ, *elle rencontrera forcément toute autre perpendiculaire à* Δ *dont le pied sera situé sur le segment déterminé par les pieds des deux premières.* Ce principe se démontre facilement.

Cela posé, nous dirons :

Deux perpendiculaires à une même droite sont partout également distantes.

Soit AB une droite (fig. 2), aux points A et B de

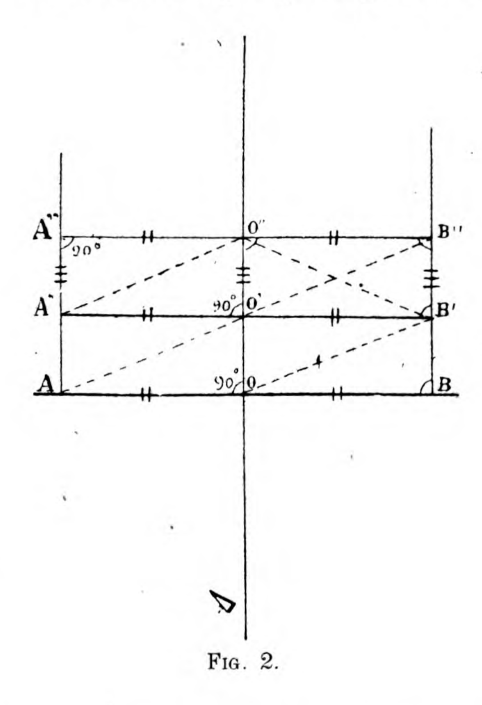


Fig. 2.

cette droite élevons deux perpendiculaires à AB, soit AA″ et BB″ ces perpendiculaires, prenons de

plus $AA'' = BB''$, joignons $A''B''$, ensuite élevons au point O, milieu du segment AB, une perpendiculaire Δ. Il est facile de démontrer que Δ est aussi perpendiculaire à la droite $A''B''$ en son milieu et à toute autre droite, $A'B'$, qui corresponde à des segments AA' et BB' égaux. (Il suffit pour cela de rabattre le demi-plan qui contient $AA'A''$ sur l'autre demi-plan en le tournant autour de Δ comme axe.)

Je dis maintenant que l'on a :

$AA'' = OO'' = BB''$; de même $AA' = OO' = BB'$.

Il suffit de prouver une de ces égalités, la première par exemple :

Je dis que le segment OO'' ne peut être ni plus grand que BB'' et ni plus petit, car en vertu du principe énoncé plus haut, toutes les perpendiculaires au segment OO'' doivent rencontrer le segment BB''.

1° Supposons que l'on ait $OO'' < BB''$, et posons : $BB'' - OO'' = \varepsilon$, ε représentant un segment de droite d'une longueur quelconque. Portons cette longueur ε sur BB'' et sur AA'', à partir de B et de A. Appelons A_ε et B_ε les points qui y correspondent. Traçons la droite $A_\varepsilon B_\varepsilon$; cette droite, on le sait, est perpendiculaire à la droite Δ, soit O_ε son pied.

Deux cas peuvent se présenter :

a) La différence ε est constante pour tous les points de Δ. En ce cas, la droite $A_\varepsilon B_\varepsilon$ devra avoir son point milieu O_ε confondu avec le point O de la droite AB, sans que les deux droites soient confon-

dues, et sans qu'elles se coupent, **supposition plus qu'absurde**;

b) La différence ε est une longueur variable pour chaque point de Δ. En ce cas, il est très aisé de vérifier qu'il serait **encore plus absurde** de supposer qu'elle a augmenté. Ce que nous pourrions encore supposer, c'est que cette différence, si elle existe, a diminué, c'est-à-dire que pour la perpendiculaire $A_\varepsilon B_\varepsilon$ à Δ l'on ait : $O_\varepsilon O < \varepsilon$ et $O_\varepsilon O > 0$; posons alors $O_\varepsilon O = \varepsilon'$ et $\varepsilon' < \varepsilon$, et nous allons vérifier si cela peut avoir lieu.

Pour cela, admettons qu'on puisse faire glisser la droite A_ε B_ε sur les droites qu'elle repose, dans le sens $O_\varepsilon O$, de manière : 1° qu'elle ait son point O_ε constamment sur Δ; 2° que tous ses points se meuvent strictement avec la même vitesse, c'est-à-dire que si un point du segment A_ε B_ε a parcouru une distance ε', tous les autres points du segment aient parcouru exactement la même distance ε', ni plus ni moins.

Or, dans ce cas, lorsque le segment A_ε B_ε aura franchi la distance ε' son point O_ε viendra coïncider avec le point milieu O de la droite AB, sans que ces deux droites se confondent et sans qu'elles se coupent, donc même conclusions que plus haut (*a*).

2° On démontrera d'une manière tout à fait analogue que le segment OO'' ne peut être plus grand que les segments AA'' et BB''. Et nous sommes amenés à conclure que seule l'hypothèse :

$$AA'' = OO'' = BB'' \text{ est vraie.}$$

De cette démonstration on tire les conclusions suivantes :

a) *Quand plusieurs droites sont perpendiculaires à une même autre, toutes ces perpendiculaires sont deux à deux partout également distantes*

b) *Quand deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre*. C. Q. F. D. [1]

Corollaire. — Dans tout triangle isocèle et dans tout triangle rectangle, la somme des angles est égale à deux angles droits. (Voir fig. 2, d'où l'on peut déduire la démonstration sans peine.)

3. Pour établir tous les théorèmes sur les parallèles, nous allons établir un lemme d'une importance capitale.

LEMME.

Un angle quelconque (**différent de zéro**) *peut être considéré comme provenant d'un angle droit, dont un côté est fixe et l'autre côté assujéti à tourner autour d'un point fixe, différent du sommet.*

Imaginons-nous une droite fixe, D, et un point fixe, M, en dehors de la droite et *arbitrairement distant* de celle-ci; soit P le plan qui les contient (fig. 3); supposons une seconde droite YX passant par le point M et pouvant tourner autour de lui dans

(1) Voir encore une troisième démonstration aux notes complémentaires, à la fin.

le plan P. Concevons-la d'abord perpendiculaire en N à D. Faisons tourner cette droite YX autour du point M dans le sens indiqué par la flèche F. Quand la droite YX quitte la position MN, le point N se déplace sur D, dans le sens de la flèche F′, et l'angle MNA ira constamment en diminuant d'une manière continue, et il pourra devenir aussi petit que l'on veut [1].

En effet, supposons que la droite YX rencontre D en des points successifs (d'ailleurs aussi proches que l'on veut l'un de l'autre), N′ N″ N‴..., etc., et considérons l'intervalle NN′, soit α un angle égal à la différence ANM — AN′M. Prenons sur le segment NN′ un point intermédiaire N_1, voisin de N′, l'angle AN_1M qui y correspond donne la relation :

$$\widehat{ANM} > \widehat{AN_1M} > \widehat{AN'M}$$

d'où :

$$\widehat{ANM} - \widehat{AN_1M} < \alpha;$$

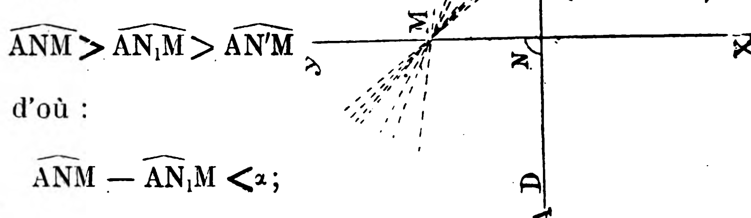


Fig. 3.

[1] Il est facile de démontrer que l'angle ANM va en décroissant; nous laisserons au lecteur le soin de le prouver.

soit α_1 cette différence, on aura $\alpha_1 < \alpha$. De même, nous pouvons prendre sur le segment NN_1 un point intermédiaire N_2, d'ailleurs aussi près que l'on veut de N_1, on aura encore : $\alpha_2 < \alpha_1$ en posant $\alpha_2 = ANM - AN_2M$, et nous trouverons de cette manière la relation :

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \ldots > \alpha_n > \ldots.$$

Or, en continuant ainsi, nous nous rapprochons insensiblement de N et, par suite, cette différence décroît constamment; elle sera zéro lorsque la droite reviendra à sa position primitive. Si l'on répète ce raisonnement pour chacun des intervalles $N'N''$, N'' N'''..., on conclut que l'angle en question décroît par des degrés insensibles, c'est-à-dire d'une manière continue.

Je dis encore que, aussi petit que soit un angle obtenu de cette manière, nous pourrons obtenir des angles qui lui sont inférieurs. En effet, soit ε un angle (d'ailleurs aussi petit que l'on veut), et auquel correspond le point N_ε, comme la droite D est indéfinie, nous pourrons trouver encore des points extérieurs à N_ε dans le même sens (F'), auxquels correspondront évidemment des angles plus petits.

Donc, la droite YX engendre, d'une part, tous les angles inférieurs à un droit jusqu'à un ε (aussi petit que l'on veut) [1] et, d'autre part, tous les angles supérieurs à un droit jusqu'à un qui vaudra :

$$2 \text{ dr.} - \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

---

[1] Voir une seconde démonstration aux notes complémentaires à la fin.

Remarque. — Le point M étant arbitrairement distant de AB, on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si petit que soit un angle, on peut toujours trouver sur chaque côté de l'angle un point à une distance donnée de l'autre côté de l'angle, pourvu que l'on regarde ces côtés comme des demi-droites indéfiniment longues.* Car on a vu que tout angle, **différent de zéro**, peut être considéré comme provenant d'un angle droit dont un côté est fixe et l'autre côté assujetti à tourner autour d'un point fixe, différent du sommet, et arbitrairement distant du côté fixe, c'est-à-dire à une distance donnée du côté fixe. C. Q. F. D.

Théorème III.

Si deux droites situées dans un même plan ne sont pas partout également distantes, elles se coupent, c'est-dire, elles ne peuvent pas être parallèles.

Considérons d'abord deux droites situées dans un même plan et qui sont partout également distantes.

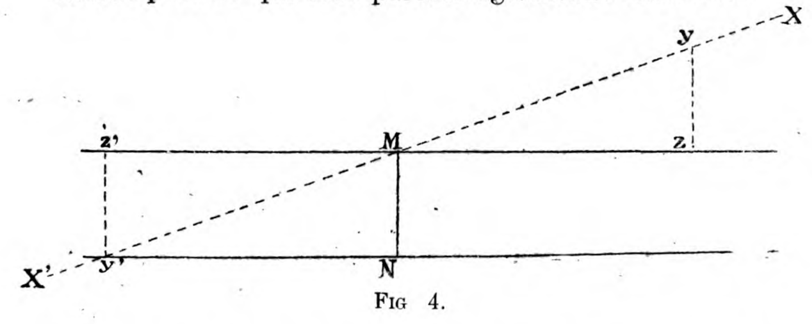


Fig 4.

Soit AB et CD ces droites (fig. 4), on a vu que ces droites sont parallèles. Prenons un point N sur la droite CD, menons NM perpendiculaire à la droite AB, Soit une troisième droite X'X passant par M et

dans le même plan que CD dont elle n'est pas partout également distante. Je dis que cette droite doit nécessairement rencontrer CD ; X'X fait avec AB un angle quelconque; prenons sur MX un point Y, tel que sa distance à la droite AB soit égale à la distance de deux parallèles, on aura YZ' = MN. Portons MY sur MX', à partir de M, soit Y'. un point de la demi-droite MX' tel que l'on ait MY' = MY, et abaissons du point Y' la perpendiculaire Y'Z' à la droite AB, à cause des triangles-rectangles MZY et M'Y'Z qui sont égaux, on aura:

$$YZ = MN = Y'Z'.$$

Or, les points Y et Y' sont situés de part et d'autre de AB sur X'X, et comme l'on a Y'Z' = MN, le point Y' se trouve nécessairement sur CD. Donc, les deux droites X'X et CD se coupent. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Deux droites parallèles sont partout également distantes.* Car on a vu que les droites d'un même plan qui ne sont pas partout également distantes se coupent ; or, deux droites qui se coupent ne sont pas parallèles. Donc les droites parallèles sont partout également distantes. C. Q. F. D.

Théorème IV.

Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.

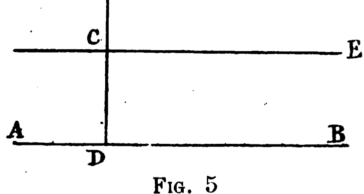


Fig. 5

En effet, soit AB la droite et C le point (fig. 5); par le point C, menons une perpendi-

culaire sur AB, soit CD cette perpendiculaire, abaissons ensuite en C une perpendiculaire sur CD, cette droite sera la parallèle demandée.

Je dis de plus, qu'elle sera la seule droite parallèle à AB menée par C [1]. En effet, les droites parallèles sont partout également distantes; or il est facile de démontrer que seule la droite CE est partout distante de AB d'une longueur égale à CD. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.* Sans quoi on pourrait d'un même point mener deux parallèles à une même droite, ce qui est impossible.

Corollaire II. — *Toute droite qui coupe une autre coupe toute parallèle à cette autre.* Même démonstration.

Corollaire III. — *Toute droite perpendiculaire à une autre est perpendiculaire à toute parallèle à cette autre.*

Soient deux droites, D et D′, perpendiculaires entre elles; par un point quelconque de D′ menons une parallèle à D, cette parallèle sera nécessairement perpendiculaire à D′, sans quoi on pourrait, par un même point, mener deux parallèles à une même droite. C Q. F. D.

Corollaire IV. — *Une droite perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre.* Démonstration analogue.

---

(1) Cette seconde partie du théorème, connue sous le nom du POSTULATUM D'EUCLIDE, a été jusqu'à présent réputée indémontrable.

4. Définitions.

Deux droites quelconques forment avec une transversale huit angles (pourvu que les deux droites ne soient pas confondues). *Les angles extérieurs aux deux droites sont dits* **externes**, *les autres sont dits* **internes**, et comme chaque droite forme avec la transversale deux angles externes et deux internes, il s'ensuit qu'il y a **quatre** *angles externes* et quatre internes. *Deux angles* **internes**, *situés de part et d'autre de la transversale, et non adjacents, sont appelés* **alternes-internes**. *Ceux qui sont extérieurs, situés de part et d'autre de la transversale et non adjacents, sont dits* **alternes-externes**. Il s'ensuit qu'il y a quatre angles alternes-externes et quatre alternes-internes. *Deux angles non adjacents, situés d'un même côté de la transversale, un intérieur et l'autre extérieur, sont appelés* **correspondants**. Il y en a quatre de chaque côté de la transversale.

Si l'on considère *encore les angles d'un même côté de la transversale, deux à deux, intérieurs ou extérieurs tous deux, ces angles seront appelés* **intérieurs d'un même côté,** *ou* **extérieurs d'un même côté.** Il y en a aussi quatre de chaque sorte.

Théorème V.

Deux parallèles font avec une transversale :

1° *Des angles alternes-externes égaux ;*

2° *Des angles alternes-internes égaux ;*

3° *Des angles correspondants égaux ;*

4° Des angles intérieurs et extérieurs, d'un même côté, supplémentaires.

Soit D et D′, deux droites parallèles, et une transversale T T′ (fig. 6). Des points M et N où la transversale rencontre les parallèles, menons des perpendi-

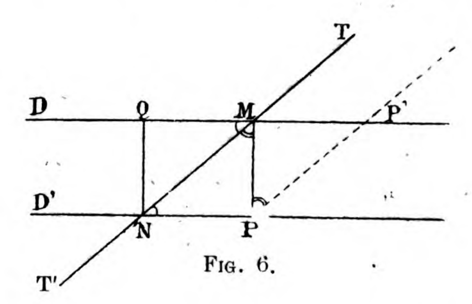


Fig. 6.

culaires aux deux parallèles, soit MP et NQ, ces perpendiculaires.

Nous avons ainsi formé deux triangles rectangles. Ces triangles sont égaux comme ayant l'hypoténuse commune, et un côté de l'angle droit égal MP = NQ (car ces perpendiculaires mesurent la distance entre les parallèles). On peut remarquer que QM = NP, pour la même raison.

Il s'ensuit que les angles $\widehat{QMN}$ et $\widehat{MNP}$ sont égaux, or ils sont *alternes-internes;* on a aussi :

$\widehat{QMT} = \widehat{D'NT}$, comme des suppléments des angles égaux, or ils sont *correspondants.*

De même : $\widehat{QMT} = \widehat{PNT'}$, car $\widehat{PNT'} = \widehat{D'NT}$ et $\widehat{QMT} = \widehat{D'NT}$ comme correspondants.

Or, les angles $\widehat{QMT}$ et $\widehat{PNT'}$ *sont alternes-externes.*

On verra aisément que des angles tels que $\widehat{QMT}$ et $\widehat{D'NT'}$ ou $\widehat{QMN}$ et $\widehat{D'NM}$ sont supplémentaires. Or,

ces **angles sont** : les deux premiers, *extérieurs d'un même côté*, **et les deux derniers,** *intérieurs d'un même côté*. C. Q. F. D.

Remarque. — La réciproque est vraie, et on la démontre facilement.

Corollaire. — *Les portions des parallèles comprises entre parallèles sont égales.*

En effet, considérons le segment de droite PP′ (fig. 6), compris entre les parallèles D et D′, et parallèle à la droite TT′. Les triangles rectangles MPN et PMP′ sont égaux comme ayant le côté de l'angle droit, MP, commun, et de plus, l'angle $\widehat{NMP}$ égal à l'angle $\widehat{MPP'}$, comme alternes-internes, donc il en résulte : PP′ = MN et MP′ = NP C. Q. F. D.

Remarque I. — La figure MNPP′ est un *quadrilatère*, comme ayant quatre côtés et quatre sommets. Ce quadrilatère est appelé parallélogramme, puisque les côtés opposés sont parallèles. On en conclut :

1° *Que les côtés opposés dans un parallélogramme* **sont égaux**;

2° *Les angles opposés dans un parallélogramme* **sont égaux**;

3° *Les angles adjacents à un même côté sont* **supplémentaires**;

4° *Que la somme des angles d'un parallélogramme est égale à* **quatre angles droits.**

Remarque II. — Un parallélogramme dont les côtés adjacents sont perpendiculaires est appelé rectangle.

Il s'ensuit que dans un rectangle tous les angles sont égaux, comme étant droits. — Exemple : la fig. QNPM, fig. 6.

Remarque III. — Le rectangle dont tous les côtés sont égaux s'appele le carré.

Théorème VI.

Deux triangles quelconques, égaux, forment toujours un parallélogramme s'ils sont disposés, de manière : 1° que leurs bases se confondent ; 2° que les angles égaux adjacents à la base deviennent alternes-internes, par rapport à elle, et 3° que leurs sommets tombent de part et d'autre du côté commun.

Soit deux triangles ABC et A'B'C' égaux, disposons-les de manière que les côtés AC et A'C', par exemple,

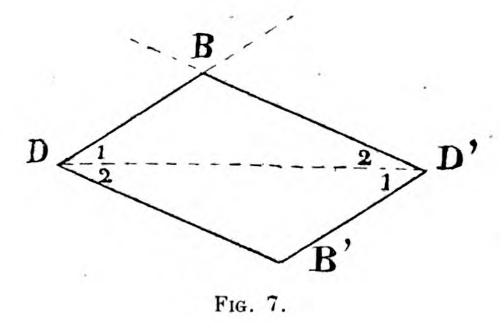


Fig. 7.

se confondent, que C' tombe en A et A' en C, et que les sommets B et B' soient de part et d'autre du côté commun. Représentons par DBB'D' la figure ainsi obtenue (fig. 7). On aura : $\widehat{B} = \widehat{B}'$ et $\widehat{D} = \widehat{D}'$,

car $D = A + C'$ et $D' = A' + C$; or, $A = A'$ et $C = C'$. Donc la figure a les quatre angles égaux et les côtés égaux deux à deux. Je dis de plus que ceux-ci sont aussi parallèles deux à deux. En effet, les angles $\widehat{D}_1$ et $\widehat{D}'_1$ sont égaux et alternes-internes, de même que $\widehat{D}_2$ et $\widehat{D}'_2$. Donc la figure DBD'B' est un parallélogramme. C. Q. F. D.

Remarque. — Si les triangles avaient été rectangles, le quadrilatère obtenu eût été un rectangle.

Corollaire I. — *Tout quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont égaux est un parallélogramme.* Car un pareil quadrilatère peut être décomposé en deux triangles égaux.

Corollaire II. — *Dans tout triangle la somme des angles est égale à deux angles droits.* Car tout triangle est équivalent à un demi-parallélogramme.

Corollaire III. — *Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens* [1] **sont égaux.** *Parallèles et dirigés en sens contraires* **sont supplémentaires.** Car si l'on prolonge convenablement leurs côtés, on formera un parallélogramme.

---

(1) Dans un parallélogramme les angles opposés ont leurs côtés dirigés dans le même sens, car il suffit de les prolonger au delà du sommet pour les obtenir disposés de la même manière. Les angles adjacents à un même côté ont leurs côtés dirigés en sens contraires. Par exemple, les angles B et D, (fig. 7), ont, le premier, BD pour côté, le second, DB pour le même côté.

Théorème VII.

Tout quadrilatère convexe dont les angles opposés sont égaux, est un parallélogramme.

Supposons un quadrilatère ABCD dont les angles opposés sont égaux deux à deux, et que l'on a : $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$; tirons la diagonale, BD par exemple. On a formé ainsi deux triangles, dont les angles à la base sont respectivement : $\widehat{B}_1$ et $\widehat{D}_1$, $\widehat{B}_2$ et $\widehat{D}_2$, il suffit de démontrer que $D_2 = B_1$. Voilà un moyen simple. On a : $\widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 2dr.$ et $\widehat{C} + \widehat{B}_2 + \widehat{D}_2 = 2dr.$ Il s'ensuit alors : $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = \widehat{B}_2 + \widehat{D}_2$; d'autre part nous avons $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2$, d'où il en résulte $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_2$. Or, les angles D_1 et B_2 sont alternes-internes, donc la figure est un parallélogramme. C. Q. F. D.

Nous aurions pu démontrer ce théorème en nous appuyanf sur le corollaire III du théorème précédent.

Notes complémentaires.

Nous reprendrons successivement le théorème II et le lemme pour leurs donner de nouvelles démonstrations qui satisferont en tous points.

Note I.

SUR LE THÉORÈME II.

Je dis que dans un plan l'on trouve des droites partout également distantes. Considérons un plan quelconque P, et prenons une droite quelconque Δ de ce plan : cette droite partage le plan en deux régions. Par deux points de Δ, M et N, menons des perpendiculaires à Δ; prenons sur ces perpendiculaires des points M′ et N′ d'un même côté de la droite Δ, tel que l'on ait $MM' = NN'$; joignons M′ N′; rabattons ensuite la région du plan qui contient les points M′ N′ sur l'autre région du plan, en la faisant tourner autour de la droite Δ comme axe, les points M′ et N′ se placeront en M_1 et N_1, et l'on sait que $M'M_1$ et $N'N_1$ sont perpendiculaires à Δ, on aura aussi $N_1M_1 = N'M'$; faisons ensuite glisser cette région rabattue sur l'autre, de manière que MM_1 et NN_1 glissent respectivement sur MM' et sur NN', il s'ensuit que lorsque N se confondra avec N′, M se confondra avec M′, et l'on conclut que M′N′, est égal à MN est perpendiculaire aux droites $M'M_1$ et $N'N_1$ de même pour M_1N_1, donc les droites $M'M_1$ et $N'N_1$, ainsi

que les autres trois droites $M'N'$, MN et M_1N_1 sont partout également distantes. C. Q. F. D.

Remarque I. — Deux droites perpendiculaires à une troisième sont partout également distantes.

Remarque II. — Quand deux droites sont partout également distantes, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Note II.

SUR LE LEMME.

Je vais démontrer que je puis obtenir, dans le lemme que j'ai établi, des angles aussi petits que je veux.

Pour cela nous allons prouver : *Que si l'on élève des perpendiculaires aux extrémités de la base d'un*

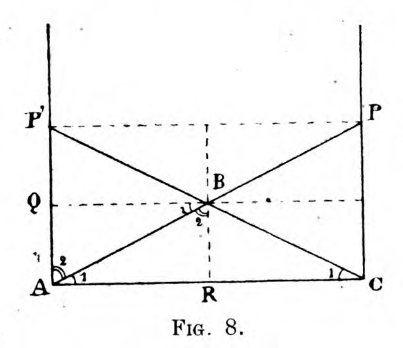


Fig. 8.

triangle isocèle et qu'en prolongeant ensuite les deux autres côtés au delà du sommet, ces côtés forment, avec les perpendiculaires, des triangles isocèles.

Soit ABC sur un triangle isocèle ($\hat{A}_1 = \hat{C}_1$) (fig. 8) prolongeons les côtés AB et BC au delà du sommet

de longueurs égales à eux-mêmes. Soit P et P′ les points extrêmes, tels que l'on ait : AB = BP = BP′ = BC. Joignons les points PP′, PC et P′A. Nous avons ainsi formé quatre triangles isocèles, il nous reste à démontrer que P′A est perpendiculaire à AC. Menons les bissectrices des angles en B : ces bissectrices sont perpendiculaires entre elles et aux bases respectives en leurs milieux. De plus les triangles opposés au sommet sont égaux, il s'ensuit que les bissectrices se coupent mutuellement en parties égales.

Les droites QB et AC sont partout également distantes, car nous pouvons considérer QB comme engendrée par le point B, du segment BR, quand celui-ci se déplace perpendiculairement à AC (théorème II). Il en résulte que QA = BR. Les triangles AQB et ARB, rectangles, sont égaux. Par conséquent, $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$; or $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$ = un angle droit, on aura donc $A_2 + A_1$ aussi un angle droit, c'est-à-dire P′A est perpendiculaire *à AC*. C. Q. F. D.

Remarque. — Lorsqu'on élève des perpendiculaires aux extrémités de la base d'un triangle isocèle, ces perpendiculaires coupent nécessairement les côtés opposés du triangle.

*
* *

De ce qui précède, il résulte clairement que si je veux obtenir un angle d'une demi-seconde (par exemple fig. 3), je devrais construire cet angle d'abord en N avec la droite D et une droite quel-

conque Δ et ensuite construire en M un angle de 89° 59′ 59 ½″ avec la droite mobile YX et le perpendiculaire à D, qui est MN. Quand cela aura lieu, la droite YX formera avec D l'angle demandé d'une demi-seconde. Car ces droites, Δ, D et YX, formeront un triangle isocèle dont la base sera la droite D. C. Q. F. D.

On démontrera d'une manière analogue qu'on peut obtenir tout angle.

Ce lemme comprend, comme cas particuliers, les propositions suivantes :

1° *Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle à cette droite;*

2° *La démonstration du postulatum d'*__Euclide__;

3° *Les droites parallèles sont partout également distantes ;*

4° *Les droites d'un même plan qui ne sont pas partout également distantes se coupent;*

5° *Une droite perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre;*

6° *Les droites parallèles sont simultanément perpendiculaires à une même droite;*

7° *Toute droite qui rencontre une autre rencontre toute parallèle à cette autre;*

8° *Deux parallèles font avec une tranversale des angles alternes-internes égaux.* Car les droites Δ et XY feront avec la perpendiculaire en M à MN aussi un triangle isocèle;

9° *Les angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires ;*

10° *Dans un triangle rectangle, la somme des angles est égale à deux angles droits.* On pourrait même déduire le cas général ;

11° *Dans un rectangle les diagonales sont égales et se coupent en leurs milieux.*

FIN.

